2023

MATHEMATICS — MINOR

Paper : MN-1

(Calculus, Geometry and Vector Analysis)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

[*Symbols have their usual meaning.*]

বিভাগ - ক

[Calculus]

(Marks : 20)

১। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×৪

(ক) মান নির্ণয় করো ঃ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sin x}$ ।

এখানে L'Hospital-এর নিয়ম প্রযোজ্য কি না ব্যাখ্যা করো।

(খ) মান নির্ণয় করো ঃ $\dfrac{dy}{dx}: x=a(\theta+\sin\theta), y=a(1+\cos\theta)$, যখন $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ।

(গ) যদি $y=(x^2-1)^n$ হয়, তাহলে দেখাও যে $(x^2-1)y_2-2(n-1)xy_1-2ny=0$ ।

(ঘ) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$ -এই Reduction formula ব্যবহার করে $\int x^3 e^x dx$-এর মান নির্ণয় করো।

(ঙ) বক্ররেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করো, যার Parametric equation হচ্ছে $x=2\sin^2 t, y=3\cos^2 t, t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, যেখানে t একটি parameter।

(চ) দেখাও যে $x^2+y^2=36$ বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্য 12π।

(ছ) $y=x^2$ বক্ররেখা এবং $y=2x$ রেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

২। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৪×৩

(ক) a এবং b-এর মান নির্ণয় করো যার জন্য $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}=1$ ।

(খ) $y=\sin(ax+b)$ অপেক্ষকটির nth order derivative নির্ণয় করো।

(গ) যদি $y=\tan^{-1}x$ হয়, তাহলে দেখাও যে $(1+x^2)y_{n+1}+2nxy_n+n(n-1)y_{n-1}=0$।

(ঘ) $\int \tan^n x\,dx$ -এর Reduction সূত্র নির্ণয় করো। এর সাহায্যে $\int \tan^4 x\,dx$-এর মান নির্ণয় করো।

(ঙ) $x=a\cos^3\theta,\ y=b\sin^3\theta$-এই বক্রটি দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(চ) X-অক্ষকে অক্ষ করে $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ বক্ররেখার ঘূর্ণন সৃষ্ট solid-এর আয়তন নির্ণয় করো।

বিভাগ - খ

[Geometry]

(Marks : 35)

৩। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২½×২

(ক) যদি অক্ষদ্বয়কে 45° ঘোরানো হয়, তবে $x^2-y^2=25$ সমীকরণটির পরিবর্তিত সমীকরণটি নির্ণয় করো।

(খ) $\frac{l}{r}=1-\cos\theta$ অধিবৃত্তটির উপরস্থ বিন্দুটি নির্ণয় করো যার radius vector-এর মান সর্বনিম্ন।

(গ) (2, 3, 4) বিন্দুটি নিম্নোক্ত গোলকের ভিতরে না বাইরে অবস্থিত তা নির্ণয় করো ঃ
$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-25=0$।

(ঘ) শঙ্কুটির সমীকরণ নির্ণয় করো, যার শীর্ষবিন্দু (0, 0, 0) এবং বক্ররেখার ভিত্তি $x^2+y^2=4,\ z=2$।

৪। *যে-কোনো পাঁচটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৬×৫

(ক) $6x^2-5xy-6y^2+14x+5y+4=0$ সমীকরণটিকে তার canonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং সেখান থেকে conic-টির প্রকৃতি নির্ণয় করো।

(খ) $r\cos(\theta-\alpha)=p$ সরলরেখাটি যদি $\frac{l}{r}=1+\cos\theta$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে দেখাও যে, $p=\frac{1}{2}l\sec\alpha$।

(গ) দেখাও যে একটি উপবৃত্তের দুটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

(ঘ) (α,β,γ) নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সমতলটি (plane) স্থানাঙ্ক অক্ষগুলিকে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে OABC গোলকের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ হবে $\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}=2$।

(ঙ) যে গোলকের জন্য $x^2+y^2+z^2+2x-4y+5=0,\ x-2y+3z+1=0$ বৃত্তটি একটি বৃহৎ বৃত্ত (Great Circle) হবে, সেই গোলকের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(চ) একটি লম্ব-বৃত্তীয় শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় করো, যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত, যার অক্ষ-এর সমীকরণ $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ এবং যার অর্ধ-উল্লম্ব কোণ 30°।

(ছ) একটি লম্ব-বৃত্তীয় নলের সমীকরণ নির্ণয় করো, যার ব্যাসার্ধ 2 এবং যার অক্ষ-এর সমীকরণ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{2}$ ।

(জ) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ -এই hyperboloid-টির generating সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় করো, যেটি (2, 3, –4) বিন্দু দিয়ে গমন করে।

(ঝ) দেখাও যে $2x^2+5y^2+3z^2-4x+20y-6z-5=0$ একটি ellipsoid-এর সমীকরণ যার কেন্দ্র (1, –2, 1)।

বিভাগ - গ

[Vector Analysis]

(Marks : 20)

৫। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×৪

(ক) $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k},\ \hat{i}+2\hat{j}+d\hat{k}$ এবং $2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টরগুলি একতলীয় হলে, d ধ্রুবকটির মান নির্ণয় করো।

(খ) $2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ বিন্দুগুলি দিয়ে একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

(গ) প্রমাণ করো যে, কোনো একটি ভেক্টর $\vec{a}$-এর জন্য, $\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})=2\vec{a}$ ।

(ঘ) $\vec{A}=5t^2\hat{i}+t\hat{j}+t^3\hat{k}$ এবং $\vec{B}=\sin t\,\hat{i}-\cos t\,\hat{j}$ হলে $\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})$-এর মান নির্ণয় করো।

(ঙ) দেখাও যে, $\left[\hat{i}+\hat{j}\ \ \hat{j}+\hat{k}\ \ \hat{k}+\hat{i}\right]=2$ ।

(চ) $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি ভেক্টর এবং k যদি একটি স্কেলার হয়, তবে সেই সমস্ত ভেক্টর $\vec{r}$ নির্ণয় করো, যেখানে $\vec{a}\times\vec{r}=\vec{b}$ এবং $\vec{a}\cdot\vec{r}=k$ ।

(ছ) O, Q, R এবং S চারটি বিন্দু যাদের কোনো তিনটি বিন্দু সমরেখ নয়। O মূল বিন্দুর সাপেক্ষে Q, R, S বিন্দুগুলির position vector যদি যথাক্রমে β, γ, δ, হয়, তবে OQ এবং RS সরলরেখা দুটির ক্ষুদ্রতম দূরত্ব (shortest distance) নির্ণয় করো।

৬। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৪×৩

(ক) $\phi=x^2-y^2+2z^2$ অপেক্ষকটির $P(1, 2, 3)$ বিন্দুতে PQ সরলরেখার দিকে Directional derivative নির্ণয় করো, যেখানে Q বিন্দুটি হল (5, 0, 4)।

(খ) $\vec{\gamma}=(2a\cos t, 2a\sin t, bt^2)$ বক্রটির, দেখাও যে, $\left[\dot{\vec{\gamma}}\ \ \ddot{\vec{\gamma}}\ \ \dddot{\vec{\gamma}}\right]=8a^2bt$ ।

(গ) যদি একটি ভেক্টর অপেক্ষক $\vec{a}(t)$ ধ্রুবক দিক নির্দেশ করে, তবে দেখাও যে, $\vec{a}\times\frac{d\vec{a}}{dt}=\vec{0}$ ।

(ঘ) একটি কণার উপর $4\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ ধ্রুবক বল দুটি প্রযুক্ত হলে, কণাটি $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ বিন্দু থে $5\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়। তাহলে কণাটির উপর বলের কার্য নির্ণয় করো।

(ঙ) ভেক্টর মেথডে দেখাও যে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ একটি সমকোণ।

(চ) $\vec{F}=3\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$ বলটি (1, – 1, 2) বিন্দুর উপর প্রয়োগ হলে (2, – 1, 3) বিন্দুকে কেন্দ্র করে $\vec{F}$ -এর moment নি করো এবং magnitude নির্ণয় করো।

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

[Symbols have their usual meaning.]

Group - A

[Calculus]

(Marks : 20)

1. Answer ***any four*** questions : 2×4

(a) Evaluate : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$.

Is L'Hospital's rule applicable here? Explain.

(b) Find $\dfrac{dy}{dx}: x=a(\theta+\sin\theta), y=a(1+\cos\theta)$, when $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

(c) If $y=(x^2-1)^n$, then show that $(x^2-1)y_2-2(n-1)xy_1-2ny=0$.

(d) Evaluate $\int x^3e^x dx$ using the reduction formula $\int x^ne^x dx = x^ne^x - n\int x^{n-1}e^x dx$.

(e) Find the curve whose parametric equation is $x=2\sin^2 t, y=3\cos^2 t, t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, where t is a parameter.

(f) Show that the length of the circumference of the circle $x^2+y^2=36$ is 12π.

(g) Find the area bounded by the curve $y=x^2$ and the line $y=2x$.

2. Answer ***any three*** questions : 4×3

(a) Find the values of a and b in order that $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}=1$.

(b) Find the nth order derivative of the function $y=\sin(ax+b)$.

(c) If $y=\tan^{-1}x$, then show that $(1+x^2)y_{n+1}+2nxy_n+n(n-1)y_{n-1}=0$.

(d) Find the Reduction formula for $\int \tan^n x\, dx$, hence evaluate $\int \tan^4 x\, dx$.

(e) Find the area enclosed by the curve $x = a\cos^3\theta,\ y = b\sin^3\theta$.

(f) Find the volume of the solid generated by revolution of the curve $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ about the X-axis.

Group - B

[Geometry]

(Marks : 35)

3. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) Transform the equation $x^2 - y^2 = 25$ when the axes are rotated through 45°.

(b) Find the point on the parabola $\frac{l}{r} = 1 - \cos\theta$ which has the smallest radius vector.

(c) Determine whether the point (2, 3, 4) is an outside or an inside point with respect to the sphere :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 25 = 0$$

(d) Find the equation of the cone whose vertex is the point (0, 0, 0) and whose base is the curve $x^2 + y^2 = 4,\ z = 2$.

4. Answer ***any five*** questions : 6×5

(a) Reduce the equation $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$ to its canonical form and hence determine the nature of the conic.

(b) If the straight line $r\cos(\theta - \alpha) = p$ touches the parabola $\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta$, then show that $p = \frac{1}{2} l \sec\alpha$.

(c) Show that the locus of the point of intersection of a pair of perpendicular tangents to an ellipse is a circle.

(d) A plane passing through a fixed point (α, β, γ) cuts the coordinate axes at A, B, C. Show that the locus of the centre of the sphere OABC is $\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 2$.

(e) Find the equation of sphere for which the circle $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 5 = 0,\ x - 2y + 3z + 1 = 0$ is a great circle.

(f) Find the equation of the right circular cone whose vertex is the origin, whose axis is the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and which has semi-vertical angle of 30°.

(g) Find the equation of the right circular cylinder of radius 2, whose axis is the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$.

(h) Find the equations to the generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$, which pass through the point (2, 3, –4).

(i) Show that the quadric surface given by the equation $2x^2+5y^2+3z^2-4x+20y-6z-5=0$ is an ellipsoid whose centre is $(1, -2, 1)$.

Group - C

[Vector Analysis]

(Marks : 20)

5. Answer ***any four*** questions : 2×4

(a) Determine the value of the constant d such that the vectors $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+2\hat{j}+d\hat{k}$ and $2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ are coplanar.

(b) Find the equation of the line passing through the point $2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ and $3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$.

(c) Prove that, for any proper vector $\vec{a}, \hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})=2\vec{a}$.

(d) If $\vec{A}=5t^2\hat{i}+t\hat{j}+t^3\hat{k}$ and $\vec{B}=\sin t\,\hat{i}-\cos t\hat{j}$, find $\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})$.

(e) Show that $\left[\hat{i}+\hat{j}\ \ \hat{j}+\hat{k}\ \ \hat{k}+\hat{i}\right]=2$.

(f) Let $\vec{a}$ and $\vec{b}$ be two given vectors and let k be a given scalar. Find all vectors $\vec{r}$ such that $\vec{a}\times\vec{r}=\vec{b}$ and $\vec{a}\cdot\vec{r}=k$.

(g) O, Q, R and S are four points, no three of which are collinear. If β, γ, δ be the position vectors of Q, R, S respectively with O as origin, then find the shortest distance between the lines OQ and RS.

6. Answer ***any three*** questions : 4×3

(a) Find the directional derivative of the function $\phi = x^2-y^2+2z^2$ at the point $P(1, 2, 3)$ in the direction of the straight line PQ, where Q is the point (5, 0, 4).

(b) For the curve $\vec{\gamma}=(2a\cos t, 2a\sin t, bt^2)$, deduce that $\left[\dot{\vec{\gamma}}\ \ \ddot{\vec{\gamma}}\ \ \dddot{\vec{\gamma}}\right]=8a^2bt$.

(c) If a vector function $\vec{a}(t)$ possesses constant direction, then show that $\vec{a}\times\frac{d\vec{a}}{dt}=\vec{0}$.

(d) A particle, acted on by constant forces $4\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ and $3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, is displaced from the point $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ to the point $5\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}$. Find the work done by the force on the particle.

(e) Show by vector method that the angle on a semi-circle is a right angle.

(f) A force $\vec{F}=3\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$ is applied at the point $(1, -1, 2)$. Find the moment of $\vec{F}$ about the point $(2, -1, 3)$. Also find its magnitude.